Analiza funkcjonalna

Lista powtórkowa (materiał z list 11-13)

1. Dla $n = 1, 2, \ldots$ określmy operator „uśredniający" $T_n : c \to c$ następująco:

$$(T_n x)_k = \frac{x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{k+n-1}}{n}$$

(czyli np. $T_3(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{x_2+x_3+x_4}{3}, \frac{x_3+x_4+x_5}{3}, \ldots))$.

- Pokazać, że T_n jest operatorem ograniczonym i znaleźć jego normę.
- Pokazać, że dla każdego $x \in c$ ciąg $T_n x$ zbiega do Tx, gdzie T jest pewnym operatorem liniowym ciągłym.
- Czy $\|T_n - T\| \to 0$?

2. W przestrzeni c ciągów zbieżnych określmy normę wzorem

$$\|x\| = \sup_n |x_n - x_{n-1}|$$

(ciągi numerujemy od jedynki i przyjmujemy $x_0 = 0$). Pokazać, że odwzorowanie $x \mapsto \lim_n x_n$ jest w tej normie nieciągłym funkcjonałem liniowym.

3. Udowodnić, że jeśli X_0 jest gęstą podprzestrzenią liniową przestrzeni Banacha X, to $X_0^* = X^*$ są izometrycznie izomorficzne.

4. Niech odwzorowanie $P : \ell^2 \to \mathbb{R}$ będzie określone następująco: $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$. Pokazać, że P jest funkcjonałem liniowym ciągłym i znaleźć jego normę.

5. Rozważmy przestrzeń $L = \left\{ f \in C([0,1]) : \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \right\}$.

   (a) Pokazać, że L jest domkniętą podprzestrzenią liniową w $C([0,1])$ i znaleźć funkcjonał $P \in C([0,1])^*$, taki że $P(f) = 0 \iff f \in L$ (czyli taki, że $L = \ker P$).

   (b) Pokazać, że taki funkcjonał jest jedyny (z dokładnością do mnożenia przez stałą). **Wskazówka:** Pokazać najpierw, że L ma kowymiar jeden, czyli istnieje taka funkcja $g \in C([0,1])$, że dowolna funkcja $f \in C([0,1])$ ma postać $f(x) = l(x) + \alpha g(x)$, gdzie $l \in L$.

   (c) Pokazać, że P nie osiąga swojej normy na żadnym elemencie domkniętej kuli jednostkowej.

6. Niech H_0 będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H i niech P_0 będzie dowolnym funkcjonałem ciągłym na H_0. Znaleźć postać wszystkich przedłużeń P_0 do funkcjonału ciągłego P na H. Pokazać, że jeśli $\|P\| = \|P_0\|$ (czyli P jest funkcjonałem z twierdzenia Hahna-Banacha), to P jest wyznaczony jednoznacznie. Jak?

   Wskazówka: Rozważyć zachowanie P na $H_0^\perp$.

7. Ciąg v_n w przestrzeni V nazywamy *słabo podstawowym*, jeśli dla każdego $P \in V^*$ ciąg $P(v_n)$ jest podstawowy. Czy słaba podstawowość pociąga za sobą słabą zbieżność?